

2. Übung zur Elementaren Stochastik

Prof. Dr. Ehrhard Behrends, WS 2009/10

Ausgabe: 19. 10. 2009

Abgabe: am 27. 10. 2009 bis 16.00 Uhr in den Fächern der Tutoren

Bei einigen Aufgaben gibt es eine *-Version. Die ist für die ambitionierteren Übungsteilnehmer gedacht.

1. Noch einmal zu σ -Algebren: Man zeige, dass die drei Bedingungen, die man an eine σ -Algebra stellt, unabhängig sind. Genauer ist zu zeigen:

- a) Es gibt eine Menge Ω und eine Teilmenge $\mathcal{E}$ der Potenzmenge, so dass gilt: Bedingung (i) und (ii) für σ -Algebren sind erfüllt, Bedingung (iii) aber nicht.
- b) Es gibt eine Menge Ω und eine Teilmenge $\mathcal{E}$ der Potenzmenge, so dass gilt: Bedingung (ii) und (iii) für σ -Algebren sind erfüllt, Bedingung (i) aber nicht.
- c) Es gibt eine Menge Ω und eine Teilmenge $\mathcal{E}$ der Potenzmenge, so dass gilt: Bedingung (i) und (iii) für σ -Algebren sind erfüllt, Bedingung (ii) aber nicht.

2. Und hier sollen Borelmengen behandelt werden. Zeigen Sie:

- a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ rational, oder } (x \text{ irrational und } |x| > \pi)\}$ ist eine Borelmenge in $\mathbb{R}$.
- b) $\{(x, y) \mid 2 \leq x < 3, 0 \leq y < x^3\}$ ist eine Borelmenge im $\mathbb{R}^2$.
- b*) $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetige Funktionen. Dann ist

$$\{(x, y) \mid x \in [0, 1], y \in \mathbb{R}, f(x) < y \leq g(x)\}$$

eine Borelmenge im $\mathbb{R}^2$.

(Tipp: Schreiben Sie die Menge als $\{f < g\} \cup \{f = g\}$ und erinnern Sie sich daran, welche Eigenschaften die Urbilder offener und abgeschlossener Mengen von stetigen Funktionen haben.)

3. Wir betrachten die Poissonverteilung zu einem Parameter $\lambda > 0$. Es sei $E := \{0, 2, \dots\}$ die Menge der geraden und $F := \{1, 3, 5, \dots\}$ die Menge der ungeraden Zahlen. Ist dann E oder F wahrscheinlicher?

(Tipp: Vielleicht kommt Ihnen die Reihe, die beim Berechnen von $P(E) - P(F)$ entsteht, irgendwie bekannt vor.)

4. Das Volumen einer Kugel mit Radius r im $\mathbb{R}^n$ ist $r^n \pi^{n/2} / \Gamma(n/2 + 1)$ für gerade $n = 2k$ und $r^n 2^n k! \pi^k / n!$ für ungerade $n = 2k + 1$.

Wir fixieren n und ein $\varepsilon > 0$ und wählen einen zufälligen Punkt aus der Einheitskugel ($= \{x \mid \|x\| \leq 1\}$), die mit der Gleichverteilung versehen ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt x „nahe am Rand“, d.h. mit welcher Wahrscheinlichkeit ist $\|x\| \geq 1 - \varepsilon$?

(Wem das zu schwer ist: Es reicht, wenn Sie das für $n = 1, 2, 3$ ausrechnen. Dann entgeht Ihnen allerdings die Erkenntnis, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit für $n \rightarrow \infty$ gegen 1 geht: Die Kugel besteht fast nur aus Punkten „nahe am Rand“.)

Homepage der Veranstaltung: page.mi.fu-berlin.de/behrends/stochastik2009

Für den mathematischen „Arbeitsspeicher“ ...

Auf die folgenden Fragen sollte man jederzeit eine richtige Antwort geben können.

Was ist eine σ -Algebra? Wie ist die σ -Algebra der Borelmengen definiert? Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum? Wie kann man einen Wahrscheinlichkeitsraum einfach definieren, wenn Ω höchstens abzählbar ist? Was versteht man unter a) der Gleichverteilung auf $\{1, \dots, n\}$, b) einem Laplaceraum, c) der Bernoulliverteilung, e) der Poissonverteilung, f) der geometrischen Verteilung? Wie kann man auf einem Intervall, versehen mit der σ -Algebra der Borelmengen, einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Hilfe einer Dichtefunktion definieren? Was versteht man unter a) Gleichverteilung, b) Exponentialverteilung, c) Normalverteilung?

... und hier noch Beispiele aus den „Arbeitsspeichern“ anderer Teilbereiche der Mathematik:

Ist $\mathcal{E}$ ein Mengensystem, d.h. eine Teilmenge der Potenzmenge einer Menge M , wie ist dann $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$ definiert? Und wie $\bigcap_{E \in \mathcal{E}} E$? Was ist eine offene, was eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$? Was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?